

3^η ΔΙΑΔΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ

"Θεόδωρος Φυλακτός"

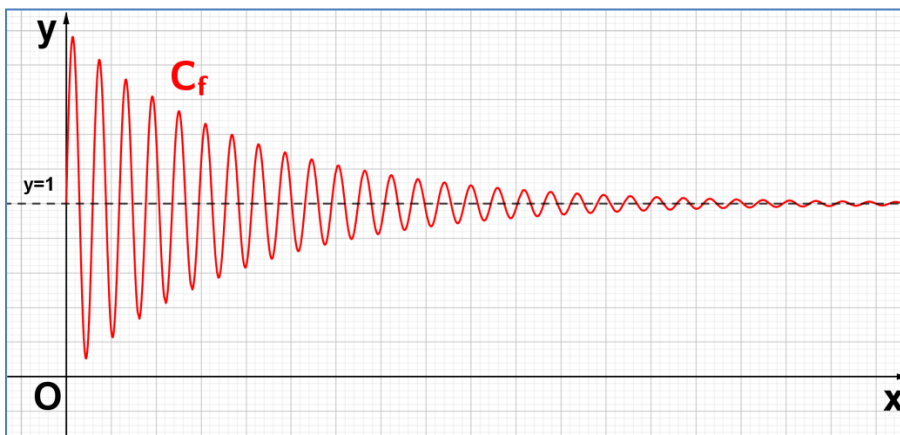
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ &
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

- A1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Μονάδες 6)
- A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle. (Μονάδες 4)
- A3. α) Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0$ και η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με την ευθεία $y = 1$, όταν το x τείνει στο $+\infty$:



Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη την παρακάτω πρόταση:

«Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φέχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ στο $+\infty$ ».

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδα 1 για το χαρακτηρισμό και Μονάδες 2 για την αιτιολόγηση)

(Μονάδες 3)

ΤΕΛΟΣ 1^{ης} ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ-Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη την παρακάτω πρόταση:
«Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R}
τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.»

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδα 1 για το χαρακτηρισμό και Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

(Μονάδες 4)

- A4. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως, τι ονομάζεται σύνθεση της συνάρτησης f με την g ; Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της; (Μονάδες 2)
- A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. (χωρίς αιτιολόγηση).
- α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y = -x$. (Μονάδες 2)
- β) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού έχει οριζόντια εφαπτομένη. (Μονάδες 2)
- γ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και δεν έχει ρίζες στο (α, β) , τότε η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. (Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - \beta}{x - \alpha}$, όπου $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και $\beta \neq \alpha^2$.

- B1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και ότι ισχύει $f^{-1} = f$. (Μονάδες 6)

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε επιπλέον γνωστό ότι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(3,5)$ είναι ίση με -3 :

- B2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$. (Μονάδες 5)
- B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα. (Μονάδες 5)
- B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

ΤΕΛΟΣ 2^{ης} ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \alpha & , \text{αν } -\pi \leq x \leq 0 \\ \gamma e^{\beta x} & , \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική

παράσταση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(0, f(0))$, την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma = 1$ **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$ **(Μονάδες 4)**

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε επιπλέον γνωστό ότι η f είναι κυρτή:

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(x+3)}{x+1-f(x)}$. **(Μονάδες 5)**

Γ5. Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία για κάθε

$x \in (0, +\infty)$ ισχύουν $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ και $\frac{f(x)}{x} = f'(x) - e$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x^e$, $x > 0$, είναι σταθερή και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e \cdot x \cdot \ln x$, $x > 0$. **(Μονάδες 6)**

Δ2. Να μελετήσετε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης f . **(Μονάδες 4)**

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε γνωστό ότι η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \frac{\ln(x+6)}{\ln x} \text{ είναι κυρτή στο } (1, +\infty):$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M(\xi, g(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\ln(f(x)+10)}{\ln(f(x)+4)} = \frac{\ln(f(x)+9)}{\ln(f(x)+3)} - 1, x > 0$.

(Μονάδες 5)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco) ούτε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Ενενήντα (90') λεπτά μετά από τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ